Sistemas Dinâmicos e Caos
Lista de Problemas 2.2

Prof. Marco Polo

Questão 01: Retratos de fase

Esboce o retrato de fase de cada um dos seguintes sistemas. r e θ são coordenadas polares. Confira sua resposta usando um sistema algébrico computacional.

(a) $\dot{r} = r^3 - 4r, \quad \dot{\theta} = 1$

(b) $\dot{r} = r(1 - r^2)(9 - r^2), \quad \dot{\theta} = 1$

(c) $\dot{r} = r(1 - r^2)(4 - r^2), \quad \dot{\theta} = 2 - r^2$

(d) $\dot{r} = r \sin r, \quad \dot{\theta} = 1$

Questão 02: Mudança de coordenadas

Mostre que o sistema $\dot{r} = r(1 - r^2)$, $\dot{\theta} = 1$ é equivalente a

$$\dot{x} = x - y - x(x^2 + y^2) \quad \dot{y} = x + y - y(x^2 + y^2),$$

onde $x = r\cos\theta$, $\dot{y} = r\sin\theta$.

Questão 03: Forma de onda

Considere o sistema $\dot{r} = r(4 - r^2)$, $\dot{\theta} = 1$, e seja $x(t) = r(t)\cos\theta(t)$. Dadas as condições iniciais $x(0) = 0.1$, $y(0) = 0$, esboce de forma aproximada a forma de onda $x(t)$ *sem* obter uma expressão explícita para ela.

Questão 04: Ciclo-limite circular

Considere $\ddot{x} + a\dot{x}(x^2 + \dot{x}^2 - 1) + x = 0$, onde $a > 0$.

(a) Encontre e classifique todos os pontos fixos.

(b) Mostre que o sistema tem um ciclo-limite circular, e encontre sua amplitude e período.

(c) Determine a estabilidade do ciclo-limite.

(d) Dê um argumento que mostre que o ciclo-limite é único, isto é, que não há outras trajetórias periódicas.

Questão 05:

Plote o retrato de fase dos seguintes sistemas gradientes, com $\dot{\mathbf{x}} = -\nabla V$

(a) $V = x^2 + y^2$

(b) $V = x^2 - y^2$

(c) $V = e^x \sin y$

Questão 06:

Mostre que o sistema $\dot{x} = y + 2xy,\ \dot{y} = x + x^2 - y^2$ não possui órbitas fechadas.

Questão 07:

Dado que um sistema é gradiente, aqui está como encontrar sua função potencial V. Suponha que $\dot{x} = f(x, y),\ \dot{y} = g(x, y)$. Então $\dot{\mathbf{x}} = -\nabla V$ implica que $f(x, y) = -\partial V/\partial x$ e $g(x, y) = -\partial V/\partial y$. Essas duas equações podem ser "parcialmente integradas" para encontrar V. Use esse procedimento para encontrar V para os seguintes sistemas gradientes:

(a) $\dot{x} = y^2 + y\cos x, \quad \dot{y} = 2xy + \sin x$

(b) $\dot{x} = 3x^2 - 1 - e^{2y}, \quad \dot{y} = -2xe^{2y}$

Questão 08: Teorema de Poincaré-Bendixson

Considere $\dot{x} = x - y - x(x^2 + 5y^2),\ \dot{y} = x + y - y(x^2 + y^2)$.

(a) Classifique o ponto fixo na origem.

(b) Reescreva o sistema em coordenadas polares, usando $r\dot{r} = x\dot{x} + y\dot{y}$ e $\dot{\theta} = (x\dot{y} - y\dot{x})/r^2$

(c) Determine o círculo de raio máximo, r_1, centrado na origem tal que todas as trajetórias tenham uma componente radialmente para fora.

(d) Determine o círculo de raio mínimo, r_2, centrado na origem tal que todas as trajetórias tenham uma componente radialmente para dentro.

(e) Prove que o sistema tem um ciclo-limite em algum lugar dentro da região de aprisionamento $r_1 \leq r \leq r_2$.

Questão 09: Análise computacional

Usando um sistema algébrico computacional, compute o ciclo-limite da questão anterior e verifique que ele se encontra dentro da região de aprisionamento que você construiu.

Questão 10: Sistemas de Liénard

Mostre que a equação $\ddot{x} + \mu(x^2 - 1)\dot{x} + \tanh x = 0$, para $\mu > 0$, tem exatamente uma solução periódica, e classifique sua estabilidade.

Questão 11: Equação de van der Pol

Para o oscilador de van der Pol com $\mu \gg 1$, mostre que o ramo positivo da *nullcline* cúbica do problema discutido em sala de aula começa em $x = 2$ e termina em $x = 1$.

Questão 12:

Estime o período do ciclo-limite de $\ddot{x} + k(x^2 - 4)\dot{x} + x = 1$ para $k \gg 1$.

Respostas

Questão 4

(a) $(0,0)$, espiral instável se $a < 2$ e nó instável se $a > 2$ (b) Período $T = 2\pi$, $R = 1$ (c) estável

Questão 7

(a) $V = -xy^2 - y\sin x$ (b) $V = -x^3 + x + xe^{2y}$

Questão 8

(a) Espiral instável (b) $\dot{r} = r(1 - r^2 - r^2\sin^2 2\theta)$, $\dot{\theta} = 1 + 4r^2\sin\theta\cos^3\theta$ (c) $r = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ (d) $r = 1$

Questão 12

$T \approx 2k(8 - 3\ln 3)$