Mecânica Quântica - MNPEF
Lista de Problemas 1.3

Departamento de Física de Ji-Paraná
Universidade Federal de Rondônia
Prof. Marco Polo

Questão 01: Elétron no poço de potencial infinito

Considere um elétron em um poço de potencial infinito de largura $L = 0,05$ nm, que é aproximadamente o raio de Bohr.

(a) Encontre as energias dos 5 estados de menor energia em unidades de eV. Compare a energia do estado fundamental desse sistema com a energia estado fundamental do átomo de hidrogênio, que é, em valor absoluto, 13,6 eV. Essas energias são próximas? *Comente o porquê.*

(b) Com os dados do item anterior, faça um diagrama de níveis com os 5 primeiros estados, mostrando as suas energias.

(c) Suponha que, ao passar do nível $n = 3$ para o nível $n = 2$, o elétron emite um fóton. Qual é o comprimento de onda desse fóton, em nm? A que faixa espectral corresponde esse fóton (azul, infravermelho, ultravioleta, AM, FM, etc)?

Questão 02: Superposição quântica

Suponha que uma partícula de massa m no poço de potencial infinito de largura L esteja, inicialmente, em uma superposição dos dois primeiros estados excitados:

$$\Psi(x,0) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[2\psi_2(x) + \psi_3(x)\right],$$

onde $\psi_n(x)$ é o estado estacionário associado ao n-ésimo nível.

(a) Calcule $\langle x \rangle$ no instante $t = 0$.

(b) Encontre a função de onda no instante t: $\Psi(x,t)$.

(c) Calcule $P(x,t)$, a densidade de probabilidade de encontrar a partícula em uma dada região do poço em um dado instante de tempo t.

(d) Desenvolva uma animação mostrando a evolução de $P(x)$ ao longo do tempo. Assuma os seguintes valores: $L = 1$, $m = 1$ e $h = 1$, onde as unidades estão em um determinado sistema de unidades arbitrário. *Explique o que está acontecendo na animação.*

(e) Confira o resultado da sua animação no site `https://phet.colorado.edu/sims/cheerpj/bound-states/latest/bound-states.html?simulation=bound-states&locale=pt_BR`.

Questão 03: Um elétron em um fio

Um elétron viajando em um fio fino de metal é uma aproximação razoável para uma partícula em um poço infinito unidimensional. O potencial no interior do fio é constante mas aumenta bruscamente nas extremidades. Suponha que o fio tem 1,0 cm de comprimento.

(a) Calcule a energia do estado fundamental do elétron.

(b) Se a energia do elétron é igual a energia cinética das moléculas de um gás à temperatura $T = 300$ K, cerca de 0,03 eV, qual é o número quântico n do elétron?

Questão 04: Cálculo de probabilidades

Suponha que a posição do elétron da questão 03 possa ser medida enquanto ele se encontra no estado fundamental.

(a) Qual é a probabilidade de encontrá-lo na região $0 < x < L/4$?

(b) Qual é a probabilidade de encontrá-lo em uma região com $\Delta x = 0,01L$ de largura e centro em $x = 5L/8$?

Questão 05:

Mostre que para grandes valores de n a diferença fracionária de energia entre o estado n e o estado $n+1$ de uma partícula em um poço quadrado infinito é dada aproximandamente por

$$\frac{E_{n+1} - E_n}{E_n} \approx \frac{2}{n}$$

Comende esse resultado à luz do princípio da correspondência de Bohr.

Questão 06:

Mostre que a função de onda $\Psi(x,t) = Ae^{(kx-\omega t)}$ não satisfaz a equação de Schroedinger dependente do tempo.

Questão 07:

Para as funções de onda

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right), n = 1, 2, 3, \ldots$$

correspondentes a um poço quadrado infinito de largura L, mostre que

$$\left\langle x^2 \right\rangle = \frac{L^2}{3} - \frac{L^2}{2n^2\pi^2}$$

Questão 08:

Use a equação de Schroedinger para mostrar que o valor esperado da energia cinética de uma partícula é dado por

$$E_c = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi^*(x) \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi(x)}{dx^2}\right) dx$$

Respostas

Questão 01

(a) 151 eV, 604 eV, 1359 eV, 2415 eV, 3774 eV
(c) 1,65 nm; raios X

Questão 02

(a) $\dfrac{(125\pi^2 - 384)L}{250\pi^2}$

(b) $\Psi(x,t) = \sqrt{\dfrac{2}{5L}} \left[2\sin\left(\dfrac{2\pi x}{L}\right) e^{-2i\pi^2\hbar t/(mL^2)} + \sin\left(\dfrac{3\pi x}{L}\right) e^{-9i\pi^2\hbar t/(2mL^2)}\right]$

(c) $P(x,t) = \dfrac{8}{5L}\sin^2\left(\dfrac{2\pi x}{L}\right) + \dfrac{2}{5L}\sin^2\left(\dfrac{3\pi x}{L}\right) + \dfrac{8}{5L}\sin\left(\dfrac{2\pi x}{L}\right)\sin\left(\dfrac{3\pi x}{L}\right)\cos\left(\dfrac{5\pi^2\hbar t}{2mL^2}\right)$

Questão 03

(a) $3,80 \times 10^{-15}$ eV
(b) $2,81 \times 10^{6}$

Questão 04

(a) 9%
(b) 1,7%