Mecânica Quântica II - Prova 3

Prof. Marco Polo
10 de maio de 2021
Início: 14:00 - duração: 3:00 horas

Só serão consideradas as respostas que forem devidamente justificadas.

Questão 01: Absorção de luz laser

Um átomo de rubídio está no seu estado fundamental, onde o elétron com maior energia está no orbital 5s. Considere que, em $t = 0$, um laser com frequência $\omega = \dfrac{E_{5p} - E_{5s}}{\hbar}$ (ressonância atômica com a transição 5s $\rightarrow$ 5p) e intensidade de 5,0 μW/cm^2 incide sobre o átomo de rubídio por um intervalo de tempo de 200 ns, e depois é desligado.

(a) **(1,5)** Calcule a amplitude E_0 do campo elétrico, em V/m, da luz emitida pelo laser. Para isso, lembre-se de que, do eletromagnetismo, a intensidade de uma onda eletromagnética plana é dada por

$I = \frac{1}{2} c\epsilon_0 \left|E_0\right|^2,$

onde c é a velocidade da luz e ϵ_0 é a constante de permissividade do vácuo.

(b) **(2,0)** Use a amplitude do campo elétrico encontrada no item (a) para calcular a probabilidade, em %, do elétron estar no estado 5p após o laser ser desligado. Para a transição do rubídio em questão, use $|\langle 5s|e\hat{r}|5p\rangle| = 10^{-29}$ C.m.

Lembre-se de que $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$. Considere o rubídio como um sistema de dois níveis.

Questão 02: Oscilador harmônico

Um oscilador harmônico unidimensional de massa m e frequência ω se encontra no seu estado fundamental para $t < 0$. A partir de $t = 0$ começa a agir uma força F dependente do tempo mas espacialmente uniforme na direção x:

$$F(t) = F_0 e^{-t/\tau}$$

No limite $t \rightarrow \infty$, calcule a probabilidade de encontrar o oscilador

(a) **(2,0)** No estado $|1\rangle$.

(b) **(1,5)** No estado $|2\rangle$.

Use teoria de perturbação em primeira ordem para responder os dois itens acima.

Questão 03: (3,0) Perturbação delta

Considere um sistema sujeito à perturbação $\hat{H}_1(t) = \hat{H}_1\delta(t)$. Mostre que, se o sistema está no estado $|i\rangle$ em $t < 0$, a probabilidade de encontrar o sistema em um estado $|f\rangle$ em $t > 0$ é dada por

$$P = \frac{1}{\hbar^2}\left|\left\langle f|\hat{H}_1|i\right\rangle\right|^2$$

Observe que $|i\rangle$ e $|f\rangle$ são autoestados de $\hat{H}_0$. Use teoria de perturbação em primeira ordem.

GABARITO

1.

A) $$I = \frac{1}{2} c \epsilon_0 |E_0|^2$$

$$|E_0| = \sqrt{\frac{2I}{c\epsilon_0}}$$

$$I = 5 \frac{\mu W}{cm^2} = \frac{5 \cdot 10^{-6} W}{10^{-4} m^2} = 0{,}05 \ W/m^2$$

$$|E_0| = \sqrt{\frac{2 \cdot 0{,}05}{3 \cdot 10^8 \cdot 8{,}85 \cdot 10^{-12}}}$$

$$\boxed{|E_0| \simeq 6 \ V/m}$$

B) $$P_{1\to 2}(t) = \left(\frac{|p| E_0}{\hbar}\right)^2 \frac{\operatorname{sen}^2[(\omega-\omega_0)t/2]}{(\omega-\omega_0)^2}$$

$$= \frac{p^2 E_0^2}{\hbar^2} \cdot \frac{\operatorname{sen}^2[(\omega-\omega_0)t/2]}{(\omega-\omega_0)^2 t^2/4} \cdot \frac{t^2}{4}$$

$$= \frac{p^2 E_0^2 t^2}{4\hbar^2} \cdot \left\{ \frac{\operatorname{sen}[(\omega-\omega_0)t/2]}{(\omega-\omega_0)t/2} \right\}^2$$

SE $\omega = \omega_0 \Rightarrow \frac{\operatorname{sen}[(\omega-\omega_0)t/2]}{(\omega_0-\omega)t/2} = 1 \Rightarrow$

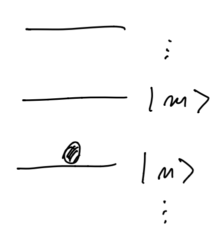
$$P_{1\to 2}(t) = \frac{p^2 E_0^2 t^2}{4\hbar^2} = \left(\frac{p E_0 t}{2\hbar}\right)^2$$

$t = 200 \ ms \Rightarrow$

$$P = \left(\frac{10^{-29} \cdot 6 \cdot 2 \cdot 10^{-7}}{2 \cdot 6{,}63 \cdot 10^{-34}} \cdot 2\pi\right)^2$$

$$\boxed{P \simeq 0{,}3\,\%}$$

2. $$F(t) = F_0 e^{-t/\tau}, \quad t \geq 0$$



A) $$C_m(t) = -\frac{i}{\hbar}\int_0^t H'_{mn}(t')\, e^{-i(E_m-E_n)t'/\hbar}\, dt'$$

$$C_1(t) = -\frac{i}{\hbar}\int_0^t H'_{10}(t')\, e^{-i(E_0-E_1)t'/\hbar}\, dt'$$

$$H'_{10} = \langle 1 | H' | 0 \rangle$$

$$E_1 - E_0 = \hbar\omega \quad \text{(OSCILADOR HARMÔNICO)}$$

$$F(t) = F_0 e^{-t/\tau}$$

$$\vec{F} = -\vec{\nabla} U \Rightarrow \quad U = -\int F(x)dx$$

$$U = -F_0 e^{-t/\tau} x = H' \Rightarrow$$

$$H'_{10} = -F_0 e^{-t/\tau} \langle 1 | \hat{x} | 0 \rangle$$

$$\hat{x} = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \left(\hat{a} + \hat{a}^+ \right) \Rightarrow$$

$$\langle 1 | \hat{x} | 0 \rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \cdot \langle 1 | 1 \rangle \Rightarrow$$

$$H'_{10} = -F_0 \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} e^{-t/\tau} \Rightarrow$$

$$C_1(t) = \frac{i}{\hbar} F_0 \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \cdot \int_0^\infty e^{-t'/\tau} e^{i\omega t'} dt'$$

$$= \frac{i F_0}{\sqrt{2m\hbar\omega}} \cdot \left. \frac{e^{-t/\tau} \cdot e^{i\omega t}}{-1/\tau + i\omega} \right|_0^\infty$$

$$= \frac{i F_0}{\sqrt{2m\hbar\omega}} \left(0 + \frac{1}{1/\tau - i\omega} \right)$$

$$P_1 = |C_1|^2 \Rightarrow$$

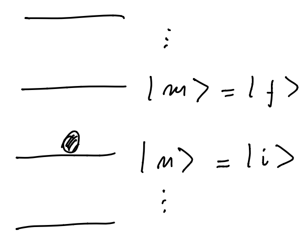
$$\boxed{P_1 = \frac{F_0^2}{2m\hbar\omega} \cdot \frac{1}{1/\tau^2 + \omega^2}}$$

B) Como $H'_{20} = \langle 2 | \hat{H}' | 0 \rangle$

$$\sim \langle 2 | \hat{x} | 0 \rangle = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{P_2 = 0}$$

3 - $\hat{H}_1(t) = \hat{H}_1\, \delta(t)$



$$C_m(t) = -\frac{i}{\hbar}\int_0^t H'_{mn}(t')\, e^{-i(E_n - E_m)t'/\hbar}\, dt'$$

$$C_f(t) = -\frac{i}{\hbar}\int_0^t H'_{fi}(t')\, e^{-i(E_i - E_f)t'/\hbar}\, dt'$$

$$H_{fi}(t') = \langle f|\, \hat{H}_1(t)\, |i\rangle$$

$$= \langle f|\, \hat{H}_1\, |i\rangle\, \delta(t) \quad \Rightarrow$$

$$C_f(t) = -\frac{i}{\hbar}\int_0^t \langle f|\, \hat{H}_1\, |i\rangle\, \delta(t')\, e^{-i(E_i - E_f)t'/\hbar}\, dt'$$

$$= -\frac{i}{\hbar}\langle f|\, \hat{H}_1\, |i\rangle \int_0^t \delta(t')\, e^{-i(E_i - E_f)t'/\hbar}\, dt'$$

$$C_f(t) = -\frac{i}{\hbar}\langle f|\, \hat{H}_1\, |i\rangle \,.\, e^0$$

$$\Rightarrow \boxed{P_f = \frac{1}{\hbar^2}\left|\langle f|\, \hat{H}_1\, |i\rangle\right|^2}$$