Mecânica Quântica II
Lista de Problemas 1.1

Departamento de Física de Ji-Paraná
Universidade Federal de Rondônia
Prof. Marco Polo

Questão 01:

Para o oscilador harmônico $[V(x) = (1/2)kx^2]$, as energias permitidas são

$$E_n = (n + 1/2)\hbar\omega, \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots),$$

em que $\omega = \sqrt{k/m}$ é a frequência clássica. Agora, suponha que a constante de mola aumente superficialmente: $k \to (1+\epsilon)k$. (Talvez resfriemos a mola para que ela se torne menos flexível)

(a) Calcule as novas energias *exatas* (isso é trivial, nesse caso). Expanda sua fórmula como uma série de potências em ϵ até segunda ordem.

(b) Agora, calcule a perturbação de primeira ordem na energia usando a teoria da perturbação.

Questão 02:

Considere o oscilador harmônico com um potencial adicional de $H_1 = \lambda x^4$.

(a) Mostre que

$$E_n^{(1)} = \frac{3\hbar^2\lambda}{4m^2\omega^2}\left(1 + 2n + 2n^2\right).$$

(b) Observe que, não importa o quão pequeno seja λ, a expansão perturbativa divergirá para n suficientemente grande. Qual é a razão física para isso?

Questão 03:

Suponha que coloquemos uma ondulação de função delta no centro do poço quadrado infinito:

$$H_1 = \alpha\delta\left(x - L/2\right)$$

onde L é a largura do poço e α é uma constante.

(a) Calcule a correção de primeira ordem para as energias permitidas. Explique por que as energias não são perturbadas para n par.

(b) Calcule os três primeiros termos não nulos na expansão da correção para a função de onda do estado fundamental, $\psi_1^{(1)}(x)$.

(c) Calcule a correção de segunda ordem das energias ($E_n^{(2)}$).

Questão 04:

Considere uma partícula carregada no potencial do oscilador harmônico unidimensional. Suponha que ativemos um campo elétrico fraco E, de modo que a energia potencial seja deslocada por uma quantidade de $H_1 = -qEx$.

(a) Demonstre que não há mudança de primeira ordem nos níveis de energia e calcule a correção de segunda ordem.

(b) Nesse caso, a equação de Schrödinger pode ser resolvida diretamente por meio de uma troca de variáveis: $x' \equiv x - qE/m\omega^2$. Calcule as energias exatas e demonstre que elas são coerentes com a estimativa da teoria da perturbação.

Questão 05:

Prove a regra de soma de Thomas-Reiche-Kuhn:

$$\sum_{n'} \left(E_{n'} - E_n\right) \left|\langle n'| X |n\rangle\right|^2 = \sum_{n'} \left(E_{n'} - E_n\right) \langle n| X |n'\rangle \langle n'| X |n\rangle = \frac{\hbar^2}{2m},$$

onde $|n\rangle$ e $|n'\rangle$ são autoestados de $H = P^2/2m + V(X)$. Teste essa regra de soma no n-ésimo estado do oscilador harmônico quântico.

Questão 06:

Quando estudamos o átomo de hidrogênio, assumimos que o próton era uma partícula puntiforme de carga e. Isto leva à interação coulombiana usual $(-e^2/r)$ com o elétron.

(a) Mostre que se o próton é considerado como uma esfera maciça de raio R uniformemente carregada, a interação coulombiana é

$$V(r) = \begin{cases} -\dfrac{3e^2}{2R} + \dfrac{e^2 r^2}{2R^3}, & r \leq R \\ -\dfrac{e^2}{r}, & r > R \end{cases}$$

(b) Calcule a correção em primeira ordem da energia do estado fundamental do hidrogênio devido à esta modificação. Você pode assumir $e^{-R/a_0} \approx 1$.

Respostas

Questão 01

(a) $E_n = (n + 1/2)\hbar\omega\sqrt{1+\epsilon}$ (b) $E_n = (n + 1/2)\hbar\omega\left(1 + \dfrac{\epsilon}{2} - \dfrac{\epsilon^2}{8} + \cdots\right)$

Questão 03

(a) $E_n^{(1)} = 0$ se n é par, e $E_n^{(1)} = 2\alpha/L$ se n é ímpar.

(b) $\psi_1^{(1)}(x) = \dfrac{m\alpha}{\pi^2\hbar 2}\sqrt{\dfrac{2}{L}}\left[\sin\left(\dfrac{3\pi x}{L}\right) - \dfrac{1}{3}\sin\left(\dfrac{5\pi x}{L}\right) + \dfrac{1}{6}\sin\left(\dfrac{7\pi x}{L}\right)\right]$

(c) $E_n^{(2)} = 0$ se n é par, e $E_n^{(2)} = -2m(\alpha/n\pi\hbar)^2$ se n é ímpar.

Questão 04

(a) $E_n^{(2)} = -\dfrac{q^2E^2}{2m\omega^2}$ (b) $E_n = \left(n + \dfrac{1}{2}\right)\hbar\omega - \dfrac{q^2E^2}{2m\omega^2}$

Questão 06

(b) $E_1^{(1)} = \dfrac{2e^2R^2}{5a_0^3}$