Física Matemática - Prova 1

Prof. Marco Polo

02 de maio de 2017

Início: 14:00 - duração: 3:00 horas

Só serão consideradas as respostas que forem devidamente justificadas.
Não é permitido o uso de calculadoras.

Questão 01: Números complexos

Considere o número complexo $z = \dfrac{1}{1+2i}$.

(a) **(0,5)** Calcule $|z|$.

(b) **(0,5)** Encontre a parte real e a parte imaginária de z.

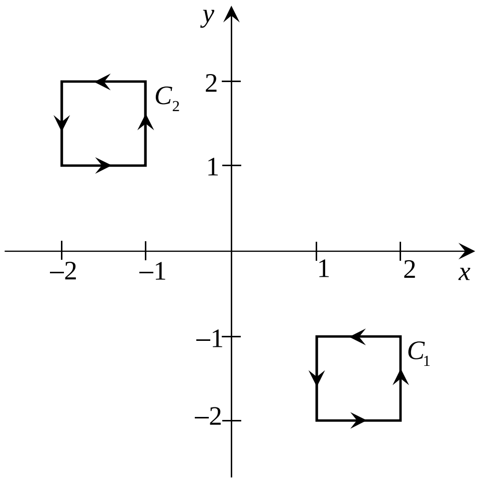
(c) **(0,5)** Represente z no plano complexo.

(d) **(1,0)** Mostre que z pode ser representado na forma $z = \dfrac{1}{\sqrt{5}} e^{-i \arctan 2}$.

(e) **(0,5)** Calcule o valor principal de $\ln z$.

Questão 02: Funções de variável complexa

Seja a função de variável complexa $f(z) = |x| - i\,|y|$, onde $x = \mathrm{Re}(z)$ e $y = \mathrm{Im}(z)$.



(a) **(1,0)** Em que região do plano complexo f é analítica?

Considerando a figura ao lado,

(b) **(1,0)** Calcule $\displaystyle\oint_{C_1} \frac{f(z)dz}{z - \sqrt{2} + i\sqrt{2}}$.

(c) **(1,0)** Calcule $\displaystyle\oint_{C_2} \frac{f(z)dz}{z - \sqrt{2} + i\sqrt{2}}$.

Questão 03: Série de Laurent e cálculo de resíduos

Considere a função $f(z) = \dfrac{1}{z^3 - 2z^2 + 2z}$.

(a) **(1,5)** Encontre a expansão em série de Laurent de $f(z)$ em torno do polo $z_1 = 1 + i$.

(b) **(1,0)** Usando o teorema do resíduo e o resultado do item (a), calcule $\displaystyle\oint_C f(z)dz$, onde C é um contorno fechado arbitrário que envolve apenas o polo $z = z_1$.

(c) **(1,5)** Usando os resultados dos itens (a) e (b), calcule a integral sobre o eixo real

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^3 - 2x^2 + 2x}.$$

GABARITO

1. $z = \dfrac{1}{1+2i}$

A) $|z| = \sqrt{z^* z} =$

$|z| = \sqrt{\dfrac{1}{1+2i} \cdot \dfrac{1}{1-2i}}$

$$\boxed{|z| = \frac{1}{\sqrt{5}}}$$

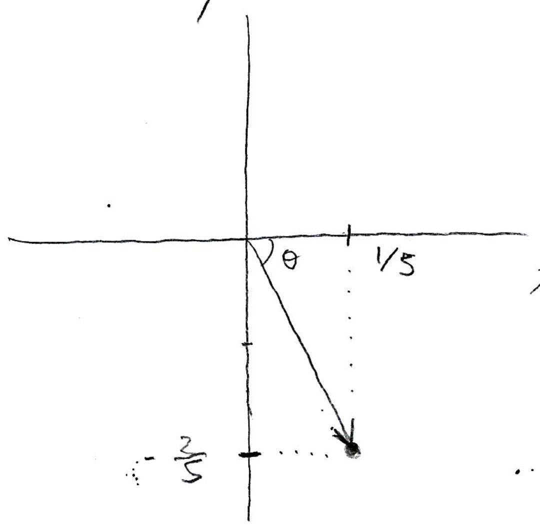
B) $z = \dfrac{1}{1+2i} \cdot \dfrac{1-2i}{1-2i}$

$z = \dfrac{1-2i}{5}$

$z = \dfrac{1}{5} - \dfrac{2}{5} i \Rightarrow$

$$\boxed{\begin{aligned} \operatorname{Re} z &= \frac{1}{5} \\ \operatorname{Im} z &= -\frac{2}{5} \end{aligned}}$$

C)



D) $z = r e^{i\theta}$

$r = \dfrac{1}{\sqrt{5}} = |z|$

$\operatorname{tg} \theta = \dfrac{-2/5}{1/5}$

$\Rightarrow \theta = \operatorname{arctg}(-2)$

$\theta = -\operatorname{arctg} 2$

$$\Rightarrow \boxed{z = \frac{1}{\sqrt{5}} e^{-i \operatorname{arctg} 2}}$$

E) $\ln z = \ln\left(\dfrac{1}{\sqrt{5}} e^{-i \operatorname{arctg} 2}\right)$

$\ln z = \ln\left(\dfrac{1}{\sqrt{5}} e^{-i(\operatorname{arctg} 2 - 2\pi k)}\right)$

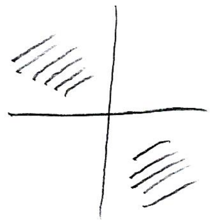
$\ln z = \ln \dfrac{1}{\sqrt{5}} - i(\operatorname{arctg} 2 - 2\pi k)$

$k = 0 \Rightarrow$

$$\boxed{\ln z = -\frac{1}{2} \ln 5 - i \operatorname{arctg} 2}$$

2 - $f(z) = |x| - i|y|$.

A) $u = |x|$
$v = -|y|$ $\Rightarrow$



$$\frac{\partial u}{\partial x} = \begin{cases} 1 \text{ se } x > 0 \\ -1 \text{ se } x < 0 \end{cases} \qquad \frac{\partial v}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 0 \qquad \frac{\partial v}{\partial y} = \begin{array}{l} -1 \text{ se } y > 0 \\ 1 \text{ se } y < 0 \end{array}$$

AS CONDIÇÕES DE CAUCHY-RIEMANN SÃO SATISFEITAS SE $x > 0$ E $y < 0$ OU $x < 0$ E $y > 0$. ENTÃO f É ANALÍTICA NO SEGUNDO E NO QUARTO QUADRANTES.

B) C) SEJA $g(z) = \dfrac{f(z)}{z - (\sqrt{2} - i\sqrt{2})}$ $\Rightarrow$ g POSSUI POLO EM $z_1 = \sqrt{2} - i\sqrt{2}$.

z_1 SE LOCALIZA DENTRO DE C_1. C_2 NÃO POSSUI POLOS. ENTÃO

$$\oint_{C_1} \frac{f(z)\,dz}{z - \sqrt{2} + i\sqrt{2}} = 2\pi i f(z_1) = 2\pi i \cdot \left(|\sqrt{2}| - i|-\sqrt{2}|\right)$$
$$= \boxed{-2\pi\sqrt{2}(1 - i)}$$

E

$$\boxed{\oint_{C_2} \frac{f(z)\,dz}{z - \sqrt{2} + i\sqrt{2}} = 0}$$

, POIS g É ANALÍTICA EM C_2.

5 - $$f(z) = \frac{1}{z^3 - 2z^2 + 2z}.$$

A) ENCONTRANDO OS POLOS DE f:

$$z^3 - 2z^2 + 2z = 0$$

$$z(z^2 - 2z + 2) = 0$$

$$z^2 - 2z + 2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Delta = 4 - 4.2 = -4$$

$$z = \frac{2 \pm 2i}{2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} z_1 = 1 + i \\ z_2 = 1 - i \\ z_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$f(z) = \frac{1}{z(z-1-i)(z-1+i)}$$

$$f(z) = f(z_1) + \left.\frac{\partial f}{\partial z}\right|_{z_1}(z-z_1) + \frac{1}{2}\left.\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\right|_{z_1}(z-z_1)^2 + \dots$$

$\Rightarrow$

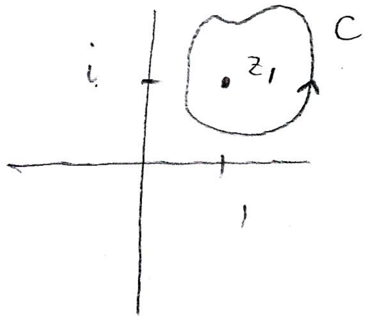
$$f(z) = \frac{1}{z-1-i}\left[\frac{1}{z_1(z_1-1+i)} - \frac{1}{z^2}\cdot\left.\frac{1}{z-1+i}\right|_{z_1}(z-z_1) - \frac{1}{z}\cdot\left.\frac{1}{(z-1+i)^2}\right|_{z_1}(z-z_1) + \dots\right]$$

$$= \frac{1}{z-1-i}\left[\frac{1}{(1+i).2i} - \frac{1}{(1+i)^2}\cdot\frac{1}{2i}(z-1-i) - \frac{1}{1+i}\cdot\frac{1}{(2i)^2}(z-1-i) + \dots\right]$$

$$\boxed{f(z) = \frac{1}{2i(1+i)} \frac{1}{z-1-i} - \frac{1}{2i}\frac{1}{1+i}\left(\frac{1}{1+i} + \frac{1}{2i}\right) + \cdots}$$

B) $$\oint_C f(z)\,dz = 2\pi i \sum_j{}' \operatorname{res} f(z_j)$$

$$= 2\pi i \operatorname{Res} f(z_1)$$



DO RESULTADO ANTERIOR,

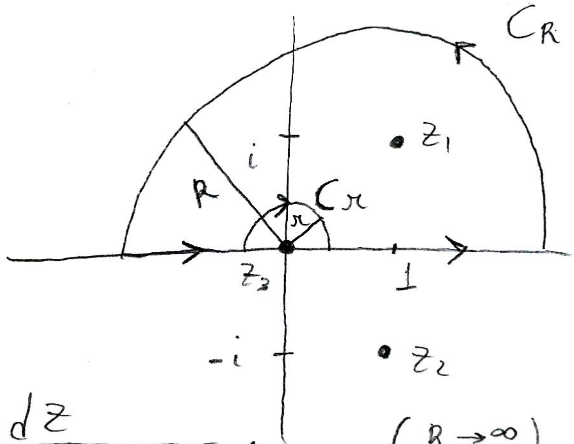
$$\operatorname{Res} f(z_1) = \frac{1}{2i(1+i)} \Rightarrow$$

$$\boxed{\oint_C \frac{dz}{z^3-2z^2+2z} = \frac{2\pi i}{2i}\frac{1}{1+i} = \frac{\pi}{1+i}}$$

c) PODEMOS ESCREVER

$$\oint_C \frac{dz}{z^3-2z^2+2z} = \int_{C_R} \frac{dz}{z^3-2z^2+2z}$$

$$+ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^3-2x^2+2x} + \int_{C_r} \frac{dz}{z^3-2z^2+2z}.$$



$\left(\begin{matrix} R \to \infty \\ r \to 0 \end{matrix}\right)$

$$\int_{C_R} \frac{dz}{z^3-2z^2+2z} = \int \frac{iRe^{i\theta}d\theta}{\cancel{Re^{i\theta}}\left(R^2e^{2i\theta} - 2Re^{i\theta} + 2\right)}$$

$z = Re^{i\theta}$ $\longrightarrow 0$ QUANDO $R \to \infty$.

$dz = iRe^{i\theta}d\theta$

$$\int_{C_r} \frac{dz}{z^3-2z^2+2z} = -\int_0^{\pi} \frac{i\cancel{r}e^{i\theta}\,d\theta}{\cancel{r}e^{i\theta}(r^2e^{i\theta}-2re^{i\theta}+2)}$$

$$= -i\int_0^{\pi} \frac{d\theta}{2} = -\frac{i\pi}{2}.$$

ASSIM,

$$\frac{\pi}{1+i} = 0 + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^3-2x^2+2x} - \frac{i\pi}{2}$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^3-2x^2+2x} = \frac{\pi}{1+i} + \frac{i\pi}{2}$$

$$= \frac{\pi}{1+i}\cdot\frac{1-i}{1-i} + \frac{i\pi}{2}$$

$$= \frac{\pi-\pi i}{2} + \frac{i\pi}{2}$$

$$= \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow \boxed{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^3-2x^2+2x} = \frac{\pi}{2}}$$