Cálculo Numérico
Lista de Problemas 2.2

Departamento de Física de Ji-Paraná
Universidade Federal de Rondônia
Prof. Marco Polo

Questão 01:

Transforme as EDO´s de segunda ordem abaixo em um sistema de EDO´s de primeira ordem e use o método de Runge-Kutta para resolver os sistemas numericamente. Escolha um passo de integração apropriado. Compare sua resposta com a solução exata informada abaixo plotando no intervalo informado tanto a solução exata como a solução numérica.

(a) $\begin{cases} y'' = y + 2x \\ y(0) = 1, \quad y'(0) = 1, \quad 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$

Solução exata: $y(x) = 3\sinh x - 2x$

(b) $\begin{cases} y'' + 3y' + 2y = x + 1 \\ y(0) = 0, \quad y'(0) = 0, \quad 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$

Solução exata: $y(x) = x/2 + 1/4(e^{-2x} - 1)$

(c) $\begin{cases} y'' + 4y = 0 \\ y(0) = 1, \quad y'(0) = -1, \quad 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$

Solução exata: $y(x) = \cos 2x - 1/2 \sin 2x$

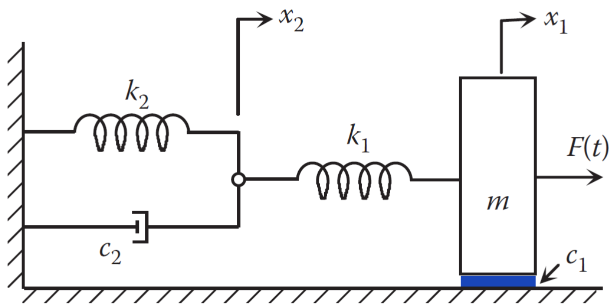
(d) $\begin{cases} y'' + 2y' + 2y = 0 \\ y(0) = 1, \quad y'(0) = 0, \quad 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$

Solução exata: $y(x) = e^{-x}(\cos x + \sin x)$

Questão 02:

Considere o sistema mecânico mostrado na figura abaixo, onde m é a massa do bloco, k_1 e k_2 são as constantes elásticas das molas, c_1 e c_2 são os coeficientes de amortecimento, x_1 e x_2 são os deslocamentos e $F(t)$ é a força aplicada. Assuma, em um dado sistema de unidades, que

$$m = 2 \quad c_1 = 1 \quad c_2 = 1 \quad k_1 = 2 \quad k_2 = \frac{2}{3} \quad F(t) = 4e^{-t/2}\sin t$$



As equações do movimento são então dadas por

$$
\begin{aligned}
2\ddot{x}_1 + \dot{x}_1 + 2(x_1 - x_2) &= 4e^{-t/2}\sin t \\
\dot{x}_2 + \frac{2}{3}x_2 - 2(x_1 - x_2) &= 0
\end{aligned}
$$

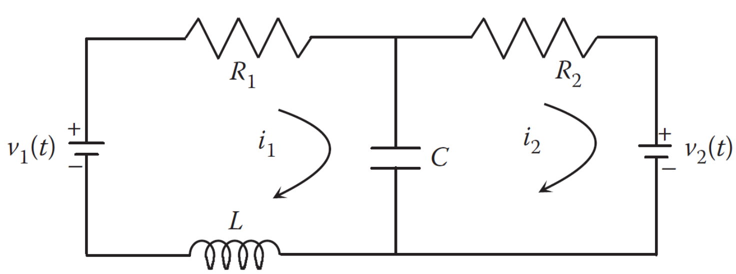
onde as condições iniciais são $x_1(0) = 0$, $x_2(0) = 1$, $\dot{x}_1(0) = -1$.

(a) Transforme esse sistema em outro com EDO´s de primeira ordem.

(b) Escreva um código em um linguagem de programação para resolver o sistema de equações pelo método RK4 clássico. Considere o intervalo $0 \leq t \leq 15$ e use ao menos 100 pontos para plotar o gráfico de $x_1(t)$ e de $x_2(t)$.

Questão 03:

O circuito de duas malhas da figura abaixo é governado pelas equações



$$
\begin{aligned}
L\ddot{q}_1 + R_1\dot{q}_1 + \frac{1}{C}(q_1 - q_2) &= v_1(t) \\
R_2\dot{q}_2 - \frac{1}{C}(q_1 - q_2) &= v_2(t),
\end{aligned}
$$

onde as condições iniciais são $q_1(0) = 0$, $q_2(0) = 0$, $\dot{q}_1(0) = 0$. Nessa notação, q_1 e q_2 são as cargas, L é a indutância do indutor, R_1 e R_2 são as resistências, C é a capacitância, e v_1 e v_2 são as tensões aplicadas. Assuma, em um dado sistema de unidades, que

$L = 0,1 \quad R_1 = R_2 = 1 \quad C_1 = 0,4 \quad v_1(t) = \sin(t) \quad v_2(t) = \sin(2t)$

(a) Transforme esse sistema em outro com EDO´s de primeira ordem.

(b) Escreva um código em um linguagem de programação para resolver o sistema de equações pelo método RK4 clássico. Represente graficamente as cargas em função do tempo, no intervalo $0 \leq t \leq 20$. Use pelo menos 100 pontos.

Questão 04:

Considere

$$\begin{aligned}\dot{x} &= 10(y - x)\\ \dot{y} &= 15x - xz - y\\ \dot{z} &= xy - 3z\end{aligned}$$

com as condições iniciais $x(0) = 1$, $y(0) = -1$, $z(0) = 1$. Revolva o sistema usando RK4 clássico com 500 pontos no intervalo $0 \leq t \leq 5$. Represente graficamente $x(t)$ *versus* $y(t)$.

Questão 05:

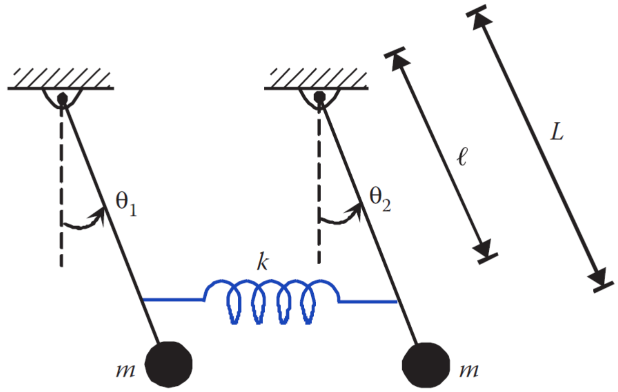
Considere o sistema do pêndulo duplo mostrado na figura abaixo, que consiste de duas hastes e bolas idênticas acopladas com uma mola linear. As equações do movimento são dadas por

$$\begin{aligned}mL^2\ddot{\theta}_1 + (mgL + k\ell^2)\theta_1 - k\ell^2\theta_2 &= 0\\ mL^2\ddot{\theta}_2 + (mgL + k\ell^2)\theta_2 - k\ell^2\theta_1 &= 0\end{aligned}$$

Considere as condições iniciais $\theta_1(0) = 0$, $\theta_2(0) = 0$, $\dot{\theta}_1(0) = -1$ e $\dot{\theta}_2(0) = 0$, e assuma que

$$\frac{g}{L} = 8 \qquad \frac{k}{m}\left(\frac{\ell}{L}\right)^2 = 2$$

Resolva numericamente o problema de valor inicial representando graficamente θ_1 e θ_2 em função do tempo, como também $\dot{\theta}_1$ e $\dot{\theta}_2$, no intervalo $0 \leq t \leq 2$.



Questão 06:

O movimento de um objeto é descrito por

$$\begin{aligned}\ddot{x} &= -0.006v\dot{x}\\ \ddot{y} &= -0.006v\dot{y} - 9,81\end{aligned}$$

com as condições iniciais

$$\begin{aligned}x(0) &= 0\\ y(0) &= 0\\ \dot{x}(0) &= 30\\ \dot{y}(0) &= 25,\end{aligned}$$

onde 9,81 representa a aceleração da gravidade, e $v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}$ é a velocidade do objeto. A posição inicial indica que o objeto é colocado na origem do plano xy no início. Determine as coordenadas x e y do objeto entre os instantes $t = 0$ e $t = 1$, com intervalos de $0,1$. Faça um gráfico com essas informações.

Questão 07:

A força de arrasto de um objeto que se move no ar não é linear com a velocidade v, exceto para velocidades muito baixas. Um modelo um pouco mais realista para a força de arrasto no regime onde há turbulência é considerar que $F = -cv^3$, onde c é uma constante proporcional à seção de choque do objeto e à densidade do ar. Se usarmos esse modelo para a força de arrasto no problema onde uma pessoa lança uma pedra verticalmente (para cima), a equação para altura y é dada por

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{c}{m}\left(\frac{dy}{dt}\right)^3 = -g.$$

Considere os seguintes parâmetros e condições iniciais: $m = 1$ kg, $c = 1$ kg s/m^2, $g = 9,8$ m/s^2, y(0) $= 0$ e $v(0) = 6$ m/s. Determine, ao resolver o PVI por um método numérico, a altura máxima alcançada pela pedra bem como o tempo que ela leva para retornar à altura inicial $y(0)$.

Questão 08:

Considere que um satélite artificial orbita a Terra. No ponto mais próximo da Terra, o satélite possui velocidade escalar de 3 km/s e altitude de 35 mil km. Monte o sistema de EDO's que governam o movimento do satélite e, junto com as condições iniciais apropriadas, use o método de Runge-Kutta de quarta ordem para encontrar a órbita do satélite bem como o seu período de translação ao redor da Terra.

Questão 09:

Sistemas hamiltonianos não são os únicos sistemas que exibem dinâmica caótica. Sistemas que têm dissipação também podem exibir caos. O fato de que esses sistemas não conservam o volume do espaço de fase implica que as órbitas podem colapsar em superfícies que chamamos de atratores estranhos. Embora o movimento fique confinado a essa superfície atratora, o movimento dentro da superfície pode ser caótico, exibindo um expoente de Lyapunov positivo. O sistema de EDO's de Lorenz é um exemplo de sistema caótico dissipativo com um atrator estranho. As equações do sistema são três EDO's acopladas para as funções $x(t)$, $y(t)$ e $z(t)$:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \sigma(y - x) \\ \dfrac{dy}{dt} = rx - y - xz \\ \dfrac{dz}{dt} = xy - bz, \end{cases}$$

onde σ, b e r são constantes. Para r suficientemente grande, este sistema exibe caos.

Considerando os seguintes valores: $\sigma = 10$, $b = 8/3$ e $r = 28$, integre as equações de Lorentz para $0 < t < 100$. Tome como condição inicial $x = 1$, $y = 15$ e $z = 10$. A órbita exibe o atrator estranho para esse sistema dinâmico dissipativo. Ao plotar os gráfico, é interessante rotacioná-lo para ver a órbita sob diferentes ângulos.

Questão 10: Método da diferença centrada

O seguinte método de discretização pode ser usado para resolver uma equação diferencial de segunda ordem da forma $d^2x/dt^2 = f(x,t)$, com a condição inicial $x(0) = x_0$ e $x'(0) = v_0$. Primeiramente, discretize o tempo da maneira usual, fazendo $t_n = n\Delta t$. Aproxime a segunda derivada como

$$\frac{d^2x}{dt^2}(t_n) = \frac{x(t_{n+1}) - 2x(t_n) + x(t_{n-1})}{\Delta t^2}.$$

Esta aproximação é conhecida como diferença centrada, porque a expressão é simétrica com relação a t_n. A equação diferencial então se torna uma relação de recorrência:

$$x_{n+1} - 2x_n + x_{n-1} = \Delta t^2 f(x_n, t_n), \quad n > 1.$$

Note que, ao calcular a primeira iteração, x_1, dado pela condição inicial x_0, é preciso o valor de x_{-1}, que não foi definido. Portanto, precisamos de uma equação diferente para obter x_1. Use

$$x_1 = x_0 + \Delta t v_0 + \frac{\Delta t^2}{2} f(x_0, t_0),$$

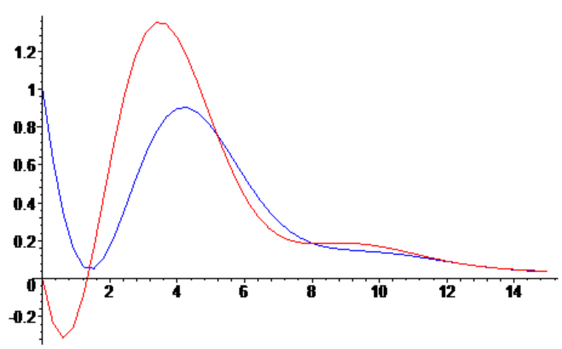
que é a fórmula para as diferentes posições sob aceleração constante.

(a) Escreva um código computacional para resolver esse problema.

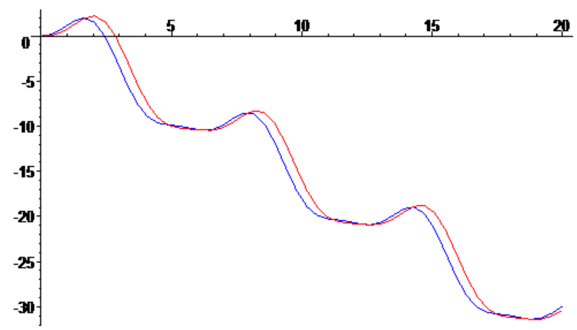
(b) Use esse código para resolver o oscilador harmônico, $d^2x/dt^2 = f(x,t)$, com $f = -x$, considerando $x_0 = 1$ e $v_0 = 0$ no intervalo $0 < t < 20$, e usando o passo de integração $\Delta t = 0,1$. Compare o resultado numérico com o resultado analítico exato, $x(t) = \cos t$.

Respostas

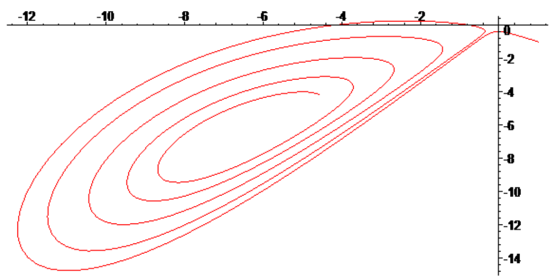
Questão 02



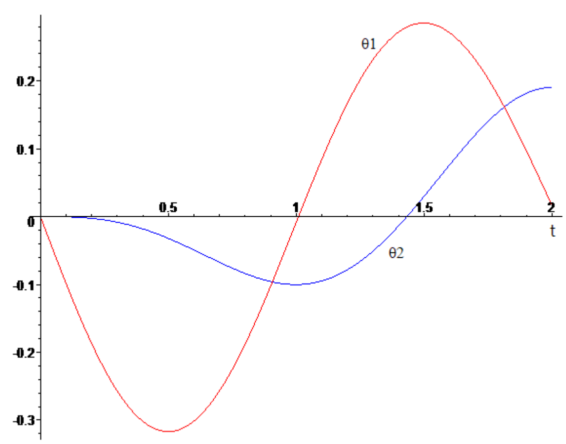
Questão 03



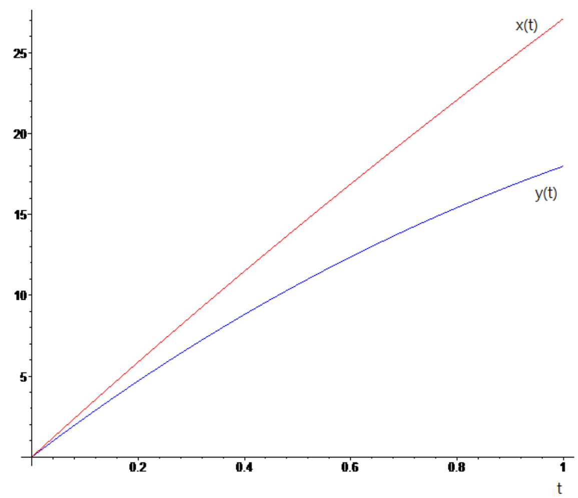
Questão 04



Questão 05



Questão 06

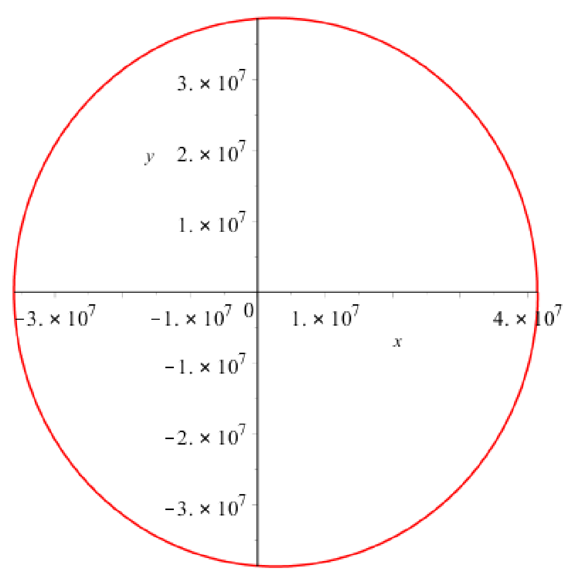


Questão 07

$y_{max} \approx 40$ cm, $t_{queda} \approx 0,57$ s

Questão 08

Período ≈ 21 h



Questão 09