Cálculo Numérico
Lista de Problemas 1.1

Departamento de Física de Ji-Paraná
Universidade Federal de Rondônia
Prof. Marco Polo

Questão 01:

Encontre o valor numérico das integrais abaixo pelo método dos retângulos usando a quantidade de retângulos indicada.

(a) $\displaystyle\int_1^3 e^{-3x/5}\,dx, \quad N = 8$

(b) $\displaystyle\int_1^5 \sqrt{2+x}\,dx, \quad N = 10$

(c) $\displaystyle\int_2^3 x\text{sen}\,x\,dx, \quad N = 10$

(d) $\displaystyle\int_{0.4}^1 (x+1)e^x\,dx, \quad N = 8$

Questão 02:

Encontre o valor numérico das integrais abaixo pelo método dos trapézios usando a quantidade de trapézios indicada.

(a) $\displaystyle\int_1^4 \frac{1}{\ln(x+1)}\,dx, \quad N = 5$

(b) $\displaystyle\int_0^{2.1} 2^x e^{-2x}\,dx, \quad N = 7$

(c) $\displaystyle\int_{0.2}^{1.4} 2^{x^3}\,dx, \quad N = 6$

(d) $\displaystyle\int_{0.3}^3 \sqrt{1+x^3}\,dx, \quad N = 9$

Questão 03:

Calcule numericamente

$$\int_0^{8\pi} e^{-x/5}\cos(x)dx$$

usando $N = 10, N = 100, N = 1000$ partes. Em cada caso, calcule o erro relativo em % tomando como base o valor exato da integral.

(a) Usando o método dos retângulos.

(b) Usando o método dos trapézios.

Questão 04:

Mostre, pelo método dos retângulos, que o valor numérico da integral

$$\int_0^{2\pi} \sin(x^2)dx$$

pode ser aproximado por

$$\frac{2\pi}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\sin\left(\frac{4k^2\pi^2}{N^2}\right)$$

onde N é a quantidade de retângulos.

Questão 05:

Mostre, pelo método dos trapézios, que o valor numérico da integral

$$\int_1^{3/2} \ln(\tan(x))dx$$

pode ser aproximado por

$$\frac{1}{4N}\left[\ln\left(\tan(1)\right) + \ln\left(\tan\left(\frac{3}{2}\right)\right) + 2\sum_{k=1}^{N-1}\ln\left(\tan\left(1+\frac{k}{2N}\right)\right)\right]$$

onde N é a quantidade de trapézios.

Questão 06:

Calcule o valor numérico de

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}$$

usando o método dos trapézios.

Questão 07:

A fórmula de Debye para a capacidade calorífica C_V de um sólido é $C_V = 9Nk_B g(u)$, onde

$$g(u) = u^3 \int_0^{1/u} \frac{x^4 e^x}{(e^x - 1)^2} dx$$

onde N é o número de partículas do sólido, k_B é a constante de Boltzmann, $u = T/\Theta_D$, T é a temperatura e Θ_D é a temperatura de Debye. Calcule numericamente $g(u)$ com $u = 0$ até $u = 1.0$ em intervalos de 0.05 e plote o gráfico.

Questão 08:

O período de um pêndulo de comprimento L é $T = 4\sqrt{L/g}h(\theta_0)$, onde g é a aceleração da gravidade, θ_0 representa a amplitude angular e

$$h(\theta_0) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - \sin^2(\theta_0/2)\sin^2\theta}}.$$

Calcule numericamente $h(15^o)$, $h(30^o)$ e $h(45^o)$, e compare esses valores com $h(0) = \pi/2$ (a aproximação usada para pequenos ângulos).

Questão 09:

A tabela mostra a potência P fornecida para as rodas de um carro em função da sua velocidade v. Se a massa do carro é $m = 2000$ kg, determine o tempo Δt que é gasto para acelerar o carro de 1 m/s para 6 m/s. Use o método dos retângulos. Dica:

$$\Delta t = m \int_1^6 \frac{v dv}{P},$$

que pode ser derivado de segunda lei de Newton $F = mdv/dt$ e da definição de potência $P = Fv$.

v (m/s)	0	1.0	1.8	2.4	3.5	4.4	5.1	6.0
P (kW)	0	4.7	12.2	19.0	31.8	40.1	43.8	43.2

Questão 10:

O método de integração numérica de Simpson é similar ao método dos trapézios. Entretanto, a curva que liga os pontos $(x_k, f(x_k))$ e $(x_{k+1}, f(x_{k+1}))$ não é uma reta, e sim a curva de uma função polinomial, o que diminui o erro em muitos casos. Mostre que, se for usada uma parábola na conexão dos pontos, a integral no intervalo $[a, b]$ pode ser aproximada pela expressão

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{6}\left[f(a) + f(b) + 4\sum_{k=2,4,6,\dots}^{N} f(x_k) + 2\sum_{k=3,5,7,\dots}^{N-1} f(x_k)\right]$$

Respostas

Questão 1

(a) .6883250348 (b) 8.698669248 (c) 1.436845971 (d) 2.022483890

Questão 2

(a) 2.617389406 (b) .7251524225 (c) 2.559596687 (d) 7.058565325

Questão 3

(a) 1.585987389, 730%; .3169341716, 65.9%; .2035402570; 6.54% (b) .3375956508, 76.7%; .1920949977, 0.55%; .1910563396; 0.0055%