Cálculo Diferencial e Integral - Prova 1

Prof. Marco Polo

17 de fevereiro de 2023

Início: 19:00 - duração: 2:30 horas

Só serão consideradas as respostas que forem devidamente justificadas.
É proibido o uso de calculadoras, smartphones ou computadores.

Questão 01: Limites

Calcule os seguintes limites:

(a) (0,75) $\lim_{x\to 0} \frac{5x^2+3x}{x}$

(b) (0,75) $\lim_{x\to 0^-} \frac{5}{x^3}$

(c) (0,75) $\lim_{x\to 3} \frac{x^2-6x+9}{x-3}$

(d) (0,75) $\lim_{x\to \infty} \frac{5x^4-4x^2}{2x^4+9x}$

Questão 02: (2,0) Reta tangente

Encontre a equação da reta tangente à curva $y = 2x^2 - 3$ no ponto P(2, 5). Esboce um gráfico com a curva y e com a reta tangente à ela no ponto P.

Questão 03: Derivada como um limite

Usando a definição de derivada a partir de um limite, isto é,

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h},$$

calcule a derivada das seguintes funções:

(a) (1,0) $f(x) = 5 - 7x$

(b) (1,0) $g(t) = -7t^2 + 13$

Questão 04: Regras de derivação

Usando as regras de derivação vistas em sala de aula, calcule a derivada das seguintes funções:

(a) (1,0) $f(w) = \frac{2}{w} - \frac{w^3}{5}$

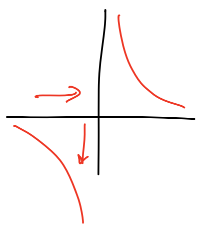
(b) (1,0) $y(t) = \frac{3t^2}{e^t}$

(c) (1,0) $g(r) = 4r^5\sqrt{r} + (4r-3)^2$

GABARITO

1- A) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{5x^2+3x}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x(5x+3)}{x} = \lim\limits_{x \to 0} (5x+3) = \boxed{3}$

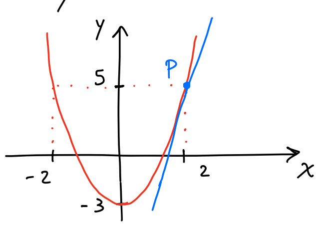
B) $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{5}{x^3} = -\infty$



C) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^2-6x+9}{x-3} = \lim\limits_{x \to 3} \dfrac{(x-3)^2}{x-3} = \lim\limits_{x \to 3} (x-3) = \boxed{0}$

D) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{5x^4-4x^2}{2x^4+9x} = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x^4\left(5-\frac{4}{x^2}\right)}{x^4\left(2+\frac{9}{x^3}\right)} = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{5-\frac{4}{x^2}}{2+\frac{9}{x^3}} = \boxed{\dfrac{5}{2}}$

2- $y = 2x^2 - 3$



$y_T = mx + p$

$y'(x) = 4x$

$m = y'(2) = 8 \Rightarrow$

$y_T = 8x + p$

$P(2,5)$ ESTÁ EM $y_T \Rightarrow$

$5 = 8.2 + p$

$5 = 16 + p$

$p = -11$

$\Rightarrow \boxed{y_T = 8x - 11}$

3- A) $f(x) = 5 - 7x$

$f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\cancel{5} - 7(\cancel{x}+h) - (\cancel{5} - \cancel{7x})}{h} = \lim\limits_{h \to 0} -\dfrac{7h}{h}$

$\boxed{f'(x) = -7}$

B) $g(x) = -7t^2 + 13$

$g'(x) = \lim\limits_{t \to 0} \dfrac{f(t+h) - f(t)}{h} = \lim\limits_{t \to 0} \dfrac{-7(t+h)^2 + \cancel{13} - (-7t^2 + \cancel{13})}{h} = \lim\limits_{t \to 0} \dfrac{\cancel{-7t^2} - 14th - 7h^2 + \cancel{7t^2}}{h} = \lim\limits_{t \to 0} \dfrac{-\cancel{h}(14t + 7h)}{\cancel{h}}$

$\boxed{g'(x) = -14t}$

4 - A) $f(w) = \frac{2}{w} - \frac{w^3}{5}$

$f(w) = 2w^{-1} - \frac{w^3}{5}$

$\boxed{f'(w) = -\frac{2}{w^2} - \frac{3w^2}{5}}$

B) $y(t) = \frac{3t^2}{e^t}$

$y'(t) = \frac{6t \cdot e^t + 3t^2 e^t}{(e^t)^2}$

$y'(t) = \frac{6t + 3t^2}{e^t}$

$\boxed{y'(t) = \frac{3t(2+t)}{e^t}}$

C) $g(x) = 4x^5\sqrt{x} + (4x-3)^2$

$g(x) = 4x^{11/2} + 16x^2 - 24x + 9$

$g'(x) = 4 \cdot \frac{11}{2} x^{9/2} + 32x - 24$

$\boxed{g'(x) = 22x^4\sqrt{x} + 32x - 24}$