Cálculo Diferencial e Integral
Lista de Problemas 2.3

Departamento de Física de Ji-Paraná
Universidade Federal de Rondônia
Prof. Marco Polo

Questão 01

Encontre o limite. Use a Regra de l'Hôspital quando for apropriado. Se houver um método mais elementar, considere utilizá-lo. Se a Regra de l'Hôspital não se aplicar, explique o porquê.

(a) $\displaystyle\lim_{x\to -1} \frac{x^2-1}{x+1}$

(b) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{x^3-2x^2+1}{x^3-1}$

(c) $\displaystyle\lim_{x\to (\pi/2)^+} \frac{\cos x}{1-\sin x}$

(d) $\displaystyle\lim_{t\to 0} \frac{e^{2t}-1}{\sin t}$

(e) $\displaystyle\lim_{\theta\to \pi/2} \frac{1-\sin\theta}{1+\cos 2\theta}$

(f) $\displaystyle\lim_{x\to \infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$

(g) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{x}$

(h) $\displaystyle\lim_{t\to 1} \frac{t^8-1}{t^5-1}$

(i) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+2x}-\sqrt{1-4x}}{x}$

(j) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1-x}{x^2}$

(k) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\tanh x}{\tan x}$

(l) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\arcsin x}{x}$

(m) $\lim_{x\to 0} \dfrac{x3^x}{3^x - 1}$

(n) $\lim_{x\to 0} \dfrac{x + \sin x}{x + \cos x}$

(o) $\lim_{x\to 1} \dfrac{1 - x + \ln x}{1 + \cos \pi x}$

(p) $\lim_{x\to 1} \dfrac{x^a - ax + a - 1}{(x-1)^2}$

(q) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\cos x - 1 + \frac{1}{2}x^2}{x^4}$

(r) $\lim_{x\to \infty} x \sin(\pi/x)$

(s) $\lim_{x\to 0} \cot 2x \sin 6x$

(t) $\lim_{x\to \infty} x^3 e^{-x^2}$

(u) $\lim_{x\to 1} \ln x \tan(\pi x/2)$

(v) $\lim_{x\to 1} \left(\dfrac{x}{x-1} - \dfrac{1}{\ln x}\right)$

(w) $\lim_{x\to 0^+} \left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{e^x - 1}\right)$

(x) $\lim_{x\to \infty} (x - \ln x)$

Questão 02

Demonstre que

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^n} = \infty$$

para qualquer inteiro positivo n. Isso mostra que a função exponencial tende mais rapidamente ao infinito que qualquer potência de x.

Questão 03

Se uma bola de metal de massa m for lançada na água e a força de resistência for proporcional ao quadrado da velocidade, então a distância que a bola percorreu até o instante t é dada por

$$s(t) = \frac{m}{c} \ln \cosh \sqrt{\frac{gc}{mt}}$$

onde c é uma constante positiva. Encontre $\lim_{c \to 0^+} s(t)$.

Questão 04

A primeira aparição impressa da Regra de l'Hôspital foi em um livro *Analyse des infiniment petits* publicado pelo marquês de l'Hôspital em 1696. Esse foi o primeiro *livro* de cálculo publicado e o exemplo que o marquês usou em seu livro para ilustrar sua regra foi encontrar o limite da função

$$y = \frac{\sqrt{2a^3x - x^4} - a\sqrt[3]{aax}}{a - \sqrt[4]{ax^3}}$$

quando x tende a a, onde $a > 0$. (Naquela época era comum escrever aa no lugar de a^2.) Resolva esse problema.

Questão 05

Se f' for contínua, $f(2) = 0$ e $f'(2) = 7$, calcule

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(2 + 3x) + f(2 + 5x)}{x}$$

Respostas

Questão 1

(a) -2 (b) $-\frac{1}{3}$ (c) $-\infty$ (d) 2 (e) $\frac{1}{4}$ (f) 0 (g) $-\infty$ (h) $\frac{8}{5}$ (i) 3 (j) $\frac{1}{2}$ (k) 1 (l) 1 (m) $1/\ln 3$ (n) 0 (o) $-1/\pi^2$ (p) $\frac{1}{2}a(a-1)$ (q) $\frac{1}{24}$ (r) π (s) 3 (t) 0 (u) $-2/\pi$ (v) $\frac{1}{2}$ (w) $\frac{1}{2}$ (x) ∞

Questão 3

$$\frac{g}{2t}$$

Questão 4

$$\frac{16a}{9}$$

Questão 5

56